Procesos de Markov Etiquetados No Deterministas

Pedro Sánchez Terraf
junto a P. D'Argenio, P. Celayes y N. Wolovick

UMA, MdP, 25 / 09 / 2009

Resumen

1. Introducción
   - Un poco de verso
   - Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)
   - Procesos de Markov Etiquetados (PME)
2. PME No Deterministas
   - Bisimulaciones sobre PME No Deterministas
3. Problemas Abiertos

Procesos de Decisión de Markov

Propiedades de nuestros sistemas

- Son sistemas dinámicos. Tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- Nuestros modelos evolucionan con el tiempo de manera *sincrónica* (i.e., el sistema realiza una acción a en el momento que recibe una señal a de el entorno).
- Consideramos que el tiempo es discreto.
- No consideramos acciones *ocultas*, o bien: todas las acciones del sistema se corresponden con las interacciones con el entorno.
- Las transiciones del sistema no dependen de la historia pasada.

Procesos de Decisión de Markov

Propiedades de nuestros sistemas

- Son sistemas dinámicos. Tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- Nuestros modelos evolucionan con el tiempo de manera *sincrónica* (i.e., el sistema realiza una acción a en el momento que recibe una señal a de el entorno).
- Consideramos que el tiempo es discreto.
- No consideramos acciones *ocultas*, o bien: todas las acciones del sistema se corresponden con las interacciones con el entorno.
- Las transiciones del sistema no dependen de la historia pasada.

Procesos de Decisión de Markov

Propiedades de nuestros sistemas

- Son sistemas dinámicos. Tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- Nuestros modelos evolucionan con el tiempo de manera *sincrónica* (i.e., el sistema realiza una acción a en el momento que recibe una señal a de el entorno).
- Consideramos que el tiempo es discreto.
- No consideramos acciones *ocultas*, o bien: todas las acciones del sistema se corresponden con las interacciones con el entorno.
- Las transiciones del sistema no dependen de la historia pasada.

Procesos de Decisión de Markov

Propiedades de nuestros sistemas

- Son sistemas dinámicos. Tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- Nuestros modelos evolucionan con el tiempo de manera *sincrónica* (i.e., el sistema realiza una acción a en el momento que recibe una señal a de el entorno).
- Consideramos que el tiempo es discreto.
- No consideramos acciones *ocultas*, o bien: todas las acciones del sistema se corresponden con las interacciones con el entorno.
- Las transiciones del sistema no dependen de la historia pasada.

Procesos de Decisión de Markov

Propiedades de nuestros sistemas

- Son sistemas dinámicos. Tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- Nuestros modelos evolucionan con el tiempo de manera *sincrónica* (i.e., el sistema realiza una acción a en el momento que recibe una señal a de el entorno).
- Consideramos que el tiempo es discreto.
- No consideramos acciones *ocultas*, o bien: todas las acciones del sistema se corresponden con las interacciones con el entorno.
- Las transiciones del sistema no dependen de la historia pasada.

Un modelo de juguete

Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

Un modelo de juguete

Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

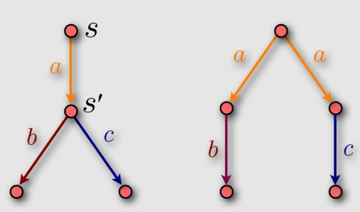
Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.

Un modelo de juguete

Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.

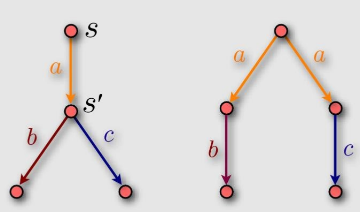


Un modelo de juguete

Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.



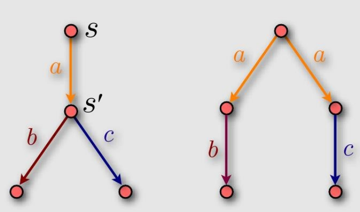
Los dos STE de la derecha tienen la misma *traza*: las mismas cadenas de acciones llevan a un estado *nulo*: $\{ab, ac\}$.

Un modelo de juguete

Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.



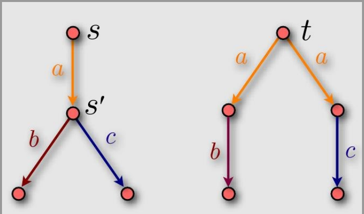
Los dos STE de la derecha tienen la misma *traza*: las mismas cadenas de acciones llevan a un estado *nulo*: $\{ab, ac\}$.
La igualdad de trazas nos da una noción (muy gruesa) de equivalencia entre sistemas.

Un modelo de juguete

Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

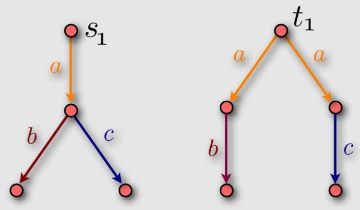
Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.



Decimos que t no **simula** a s porque mientras s puede aceptar acciones b y c después de a, t no puede hacerlo

Simulación y Bisimulación en STE

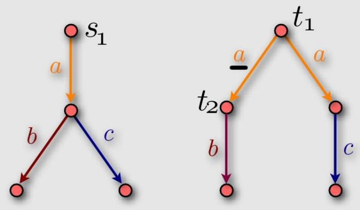
Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



$I : t_1$
$II : s_1$

Simulación y Bisimulación en STE

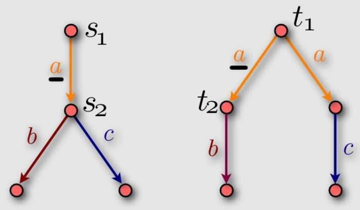
Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



$$I : t_1 \qquad a, t_2$$
$$II : s_1$$

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.

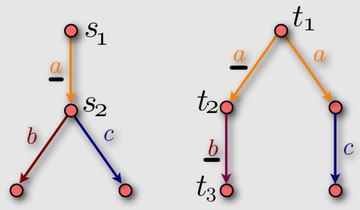


$I : t_1 \quad a, t_2$

$II : s_1 \quad a, s_2$

Simulación y Bisimulación en STE

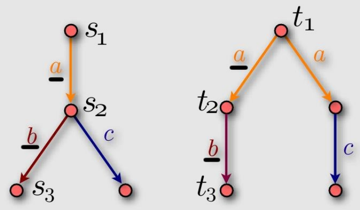
Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



$I : t_1$	a, t_2		b, t_3
$II : s_1$		a, s_2	

Simulación y Bisimulación en STE

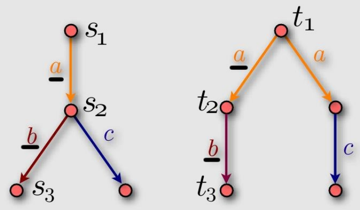
Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



$$
\begin{array}{lllll}
I : t_1 & a, t_2 & & b, t_3 & \\
II : s_1 & & a, s_2 & & b, s_3
\end{array}
$$

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



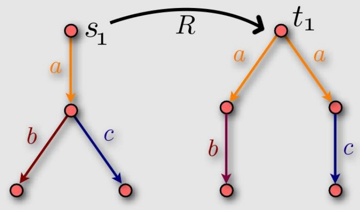
$I : t_1$	a, t_2		b, t_3	
$II : s_1$		a, s_2		b, s_3

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



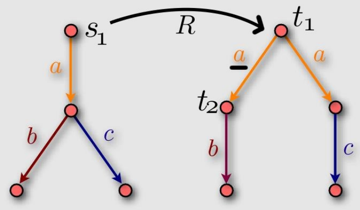
$$\begin{array}{lllllll} I : t_1 & a, t_2 & & b, t_3 & \\ II : s_1 & & a, s_2 & & b, s_3 \end{array}$$

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



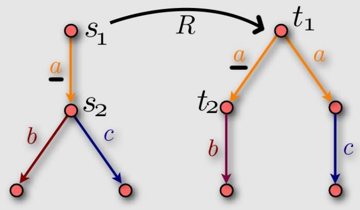
$$
\begin{array}{lllll}
I : t_1 & a, t_2 & & b, t_3 & \\
II : s_1 & & a, s_2 & & b, s_3
\end{array}
$$

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



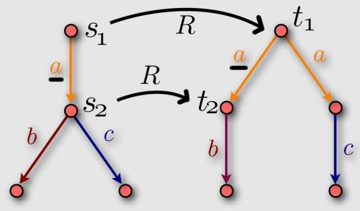
$I : t_1$	a, t_2		b, t_3	
$II : s_1$		a, s_2		b, s_3

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



$I : t_1$	a, t_2		b, t_3	
$II : s_1$		a, s_2		b, s_3

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Bisimulación

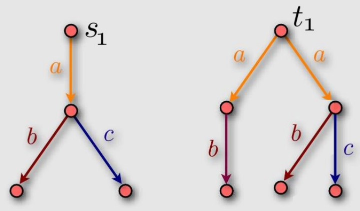
Es una relación de simulación **simétrica**. Diremos que s_1 es *bisimilar* a t_1 si existe una bisimulación R tal que $s_1\,R\,t_1$.

Notar: La bisimulación es más fina que la "doble simulación". Es decir, si s_1 es bisimilar a t_1, entonces s_1 simula t_1 y t_1 simula a s_1, **pero no recíprocamente**.

Simulación y Bisimulación en STE

Bisimulación

Es una relación de simulación **simétrica**. Diremos que s_1 es *bisimilar* a t_1 si existe una bisimulación R tal que $s_1 \, R \, t_1$.

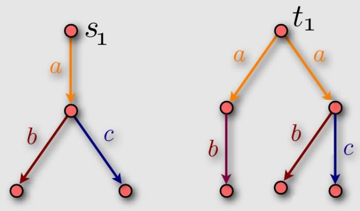


Notar: La bisimulación es más fina que la "doble simulación". Es decir, si s_1 es bisimilar a t_1, entonces s_1 simula t_1 y t_1 simula a s_1, **pero no recíprocamente**.

Simulación y Bisimulación en STE

Bisimulación

Es una relación de simulación **simétrica**. Diremos que s_1 es *bisimilar* a t_1 si existe una bisimulación R tal que $s_1 \, R \, t_1$.

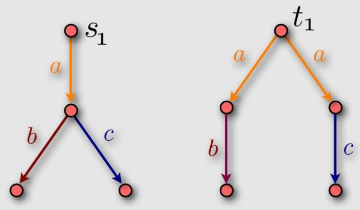


Notar: La bisimulación es más fina que la "doble simulación". Es decir, si s_1 es bisimilar a t_1, entonces s_1 simula t_1 y t_1 simula a s_1, **pero no recíprocamente.**

R simétrica $\iff$ El jugador I puede cambiar de sistema en su turno.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



$I : t_1$
$II : s_1$

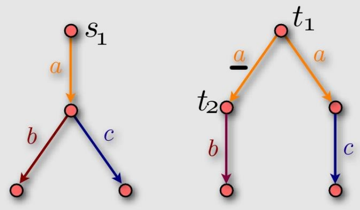
s_2, c, s_4

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



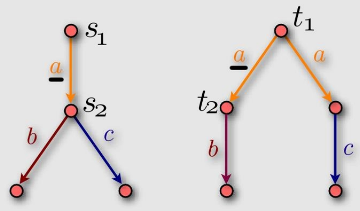
$I : t_1 \quad a, t_2 \quad s_2, c, s_4$
$II : s_1$

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



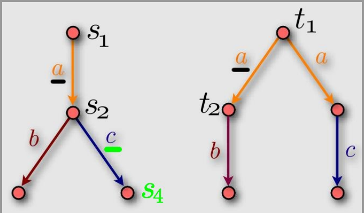
$$
\begin{array}{llll}
I : t_1 & a, t_2 & & s_2, c, s_4 \\
II : s_1 & & a, s_2 &
\end{array}
$$

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



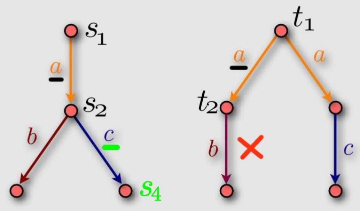
$I : t_1 \quad a, t_2 \quad s_2, c, s_4$
$II : s_1 \quad a, s_2$

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 R t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 R t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, I y II, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por s_1 y t_1.



$I : t_1$	a, t_2		s_2, c, s_4	
$II : s_1$		a, s_2		(fin)

Simulación

Es una relación R tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe s_2 tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que s_1 *simula a* s_2.

Procesos de Markov etiquetados (PME)

Definición (Desharnais et al.)

$\langle S, \mathcal{S}, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \in \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S}\rangle$;
- T_a es medible (i.e., es kernel de Markov).

Procesos de Markov etiquetados (PME)

Definición (Desharnais et al.)

$\langle S, \mathcal{S}, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \in \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S}\rangle$;
- T_a es medible (i.e., es kernel de Markov).

Procesos de Markov etiquetados (PME)

Definición (Desharnais et al.)

$\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \in \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S} \rangle$;
- T_a es medible (i.e., es kernel de Markov).

Procesos de Markov etiquetados (PME)

Definición (Desharnais et al.)

$\langle S, \mathcal{S}, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \in \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S}\rangle$;
- T_a es medible (i.e., es kernel de Markov).

Procesos de Markov etiquetados (PME)

Definición (Desharnais et al.)

$\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \in \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

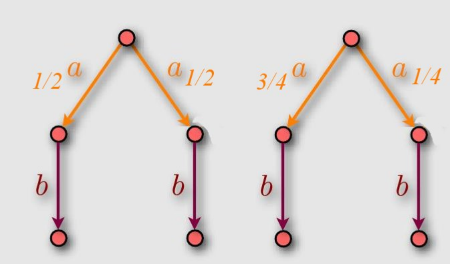
- $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S} \rangle$;
- T_a es medible (i.e., es kernel de Markov).

Notación. $s \xrightarrow{a} \mu$ si $\mu = T_a(s)$.

Bisimulación en PME

Definición

Una relación R es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.

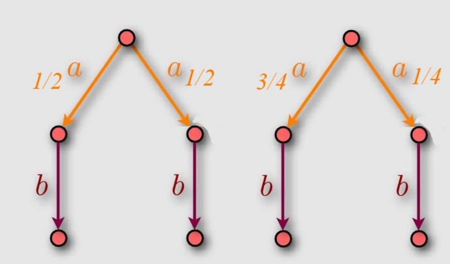


.

Bisimulación en PME

Definición

Una relación R es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.

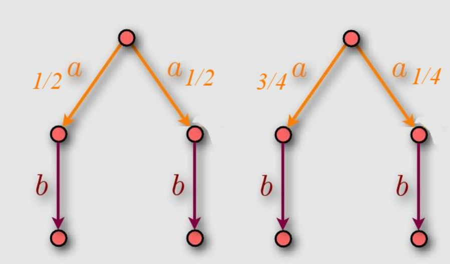


...donde $\mu R \nu$ si μ y ν coinciden en los conjuntos *R-saturados*.

Bisimulación en PME

Definición

Una relación R es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.



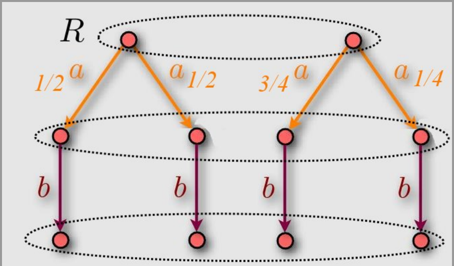
…donde $\mu R \nu$ si μ y ν coinciden en los conjuntos *R-saturados*.

…donde la familia de *R-saturados* medibles $\mathcal{S}(R)$ es:
$\{Q \in \mathcal{S} : yRx \in Q \rightarrow y \in Q\}$.

Bisimulación en PME

Definición

Una relación R es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.



…donde $\mu R \nu$ si μ y ν coinciden en los conjuntos *R-saturados*.

…donde la familia de *R-saturados* medibles $\mathcal{S}(R)$ es:

$\{Q \in \mathcal{S} : yRx \in Q \to y \in Q\}$.

Medibilidad de la Bisimulación

Teorema "del cociente" (Desharnais et al.)

Las relaciones de bisimulación están en correspondencia con las sub-σ-álgebras *estables* $\mathcal{U}$ de $\mathcal{S}$ (i.e., tales que para todo $U \in \mathbf{P}(\mathcal{U})$, $T_a^{-1}(U) \in \mathcal{U}$).

Medibilidad de la Bisimulación

Teorema "del cociente" (Desharnais et al.)

Las relaciones de bisimulación están en correspondencia con las sub-σ-álgebras *estables* $\mathcal{U}$ de $\mathcal{S}$ (i.e., tales que para todo $U \in \mathbf{P}(\mathcal{U})$, $T_a^{-1}(U) \in \mathcal{U}$).

Es decir: aunque una bisimulación R podría no ser medible (en el producto, o los conjuntos R-saturados), su comportamiento se puede describir en términos de eventos.

Un poco más de verso

Propiedades de nuestros sistemas (continuación)

- Nuestros modelos tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- La **única** interacción con el entorno se efectúa "a través" de L. Los estados no pueden ser identificados desde el exterior.
- Nos interesan las propiedades que se pueden descubrir interactuando con el sistema.

Un poco más de verso

Propiedades de nuestros sistemas (continuación)

- Nuestros modelos tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- La **única** interacción con el entorno se efectúa “a través” de L. Los estados no pueden ser identificados desde el exterior.
- Nos interesan las propiedades que se pueden descubrir interactuando con el sistema.

Un poco más de verso

Propiedades de nuestros sistemas (continuación)

- Nuestros modelos tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- La **única** interacción con el entorno se efectúa “a través” de L. Los estados no pueden ser identificados desde el exterior.
- Nos interesan las propiedades que se pueden descubrir interactuando con el sistema.

Un poco más de verso

Propiedades de nuestros sistemas (continuación)

- Nuestros modelos tendrán un conjunto de *estados internos* S y sus acciones estarán etiquetadas por un conjunto L.
- La **única** interacción con el entorno se efectúa "a través" de L. Los estados no pueden ser identificados desde el exterior.
- Nos interesan las propiedades que se pueden descubrir interactuando con el sistema.

No determinismo

Cuando para un estado del sistema tenemos dos comportamientos posibles, hablamos de *no determinismo*.

Cuando a cada comportamiento le corresponde una etiqueta distinta decimos que es *externo*.
En caso contrario, lo llamamos *interno* (no tenemos una mejor opción).

Los comportamientos probabilistas se consideran externos, luego los PME son deterministas (!).

No determinismo

Cuando para un estado del sistema tenemos dos comportamientos posibles, hablamos de *no determinismo*.

Cuando a cada comportamiento le corresponde una etiqueta distinta decimos que es *externo*.
En caso contrario, lo llamamos *interno* (no tenemos una mejor opción).

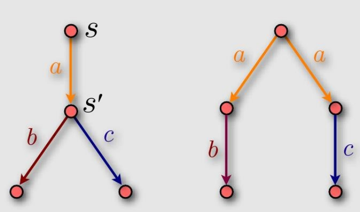
Los comportamientos probabilistas se consideran externos, luego los PME son deterministas (!).

Un modelo de juguete

Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

Notación. $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.



No determinismo

Cuando para un estado del sistema tenemos dos comportamientos posibles, hablamos de *no determinismo*.

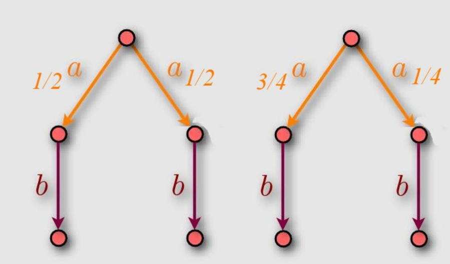
Cuando a cada comportamiento le corresponde una etiqueta distinta decimos que es *externo*.
En caso contrario, lo llamamos *interno* (no tenemos una mejor opción).

Los comportamientos probabilistas se consideran externos, luego los PME son deterministas (!).

Bisimulación en PME

Definición

Una relación R es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.



.

No determinismo

Cuando para un estado del sistema tenemos dos comportamientos posibles, hablamos de *no determinismo*.

Cuando a cada comportamiento le corresponde una etiqueta distinta decimos que es *externo*.
En caso contrario, lo llamamos *interno* (no tenemos una mejor opción).

Los comportamientos probabilistas se consideran externos, luego los PME son deterministas (!).

Nuestra contribución es la formalización de los PME no deterministas: admiten, para cada etiqueta, diversos *comportamientos probabilistas.*

Procesos de Markov etiquetados no deterministas (PMEN)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq \mathbf{P}(\mathcal{S})$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S} \rangle$;
- Para cada s, $T_a(s)$ es medible. Es decir, $T_a : S \to \mathbf{P}(\mathcal{S})$.
- T_a es medible

Notación. $s \xrightarrow{a} \mu$ si $\mu \in T_a(s)$.

Procesos de Markov etiquetados no deterministas (PMEN)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S}\rangle$;
- Para cada s, $T_a(s)$ es medible. Es decir, $T_a : S \to \mathbf{P}(\mathcal{S})$.
- T_a es medible

Notación. $s \xrightarrow{a} \mu$ si $\mu \in T_a(s)$.

Procesos de Markov etiquetados no deterministas (PMEN)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S}\rangle$;
- Para cada s, $T_a(s)$ es medible. Es decir, $T_a : S \to \mathbf{P}(\mathcal{S})$.
- T_a es medible

Notación. $s \xrightarrow{a} \mu$ si $\mu \in T_a(s)$.

Procesos de Markov etiquetados no deterministas (PMEN)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq \mathbf{P}(\mathcal{S})$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S}\rangle$;
- Para cada s, $T_a(s)$ es medible. Es decir, $T_a : S \to \mathbf{P}(\mathcal{S})$.
- T_a es medible: la estructura medible sobre $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ es $H(\mathbf{P}(\mathcal{S})) = \sigma(\{\Theta \in \mathbf{P}(\mathcal{S}) : \Theta \cap \xi \neq \emptyset\}_{\xi \in \mathbf{P}(\mathcal{S})})$.

Notación. $s \xrightarrow{a} \mu$ si $\mu \in T_a(s)$.

Procesos de Markov etiquetados no deterministas (PMEN)

Definición

$\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq \mathbf{P}(\mathcal{S})$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

- $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S} \rangle$;
- Para cada s, $T_a(s)$ es medible. Es decir, $T_a : S \to \mathbf{P}(\mathcal{S})$.
- T_a es medible: la estructura medible sobre $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ es $H(\mathbf{P}(\mathcal{S})) = \sigma(\{\Theta \in \mathbf{P}(\mathcal{S}) : \Theta \cap \xi \neq \emptyset\}_{\xi \in \mathbf{P}(\mathcal{S})})$.

Notación. $s \xrightarrow{a} \mu$ si $\mu \in T_a(s)$.

Bisimulaciones sobre PMEN

Bisimulación tradicional

R es *tradicional* si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.

Bisimulaciones sobre PMEN

Bisimulación tradicional

R es *tradicional* si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.

Bisimulación de eventos

R es *de eventos* si es de la forma $\mathcal{R}(\mathcal{U}) = \{(x,y) \in S^2 : \forall U \in \mathcal{U}(x \in U \iff y \in U)\}$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ una sub-σ-álgebra estable.

Bisimulaciones sobre PMEN

Bisimulación tradicional

R es *tradicional* si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.

Bisimulación de eventos

R es *de eventos* si es de la forma $\mathcal{R}(\mathcal{U}) = \{(x,y) \in S^2 : \forall U \in \mathcal{U}(x \in U \iff y \in U)\}$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ una sub-σ-álgebra estable.

Bisimulación de estados

R es *de estados* si es simétrica y para todo $s_1 \, R \, t_1$ implica $\forall \xi \in \Delta(\mathcal{S}(R)) : T_a(s_1) \cap \xi \neq \emptyset \iff T_a(t_1) \cap \xi \neq \emptyset$ (i.e., los conjuntos de transiciones de elementos relacionados cortan a los mismos R-saturados medibles).

Bisimulaciones sobre PMEN

Bisimulación tradicional

R es *tradicional* si es simétrica y para todos s_1, t_1, ν, si $s_1 R t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe μ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.

Bisimulación de eventos

R es *de eventos* si es de la forma $\mathcal{R}(\mathcal{U}) = \{(x,y) \in S^2 : \forall U \in \mathcal{U}(x \in U \iff y \in U)\}$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ una sub-σ-álgebra estable.

Bisimulación de estados

R es *de estados* si es simétrica y para todo $s_1 R t_1$ implica $\forall \xi \in \Delta(\mathcal{S}(R)) : T_a(s_1) \cap \xi \neq \emptyset \iff T_a(t_1) \cap \xi \neq \emptyset$ (i.e., los conjuntos de transiciones de elementos relacionados cortan a los mismos R-saturados medibles).

Teoremas “del cociente”

Lema

R es de estados sii $\mathcal{S}(R)$ es estable.

Teorema (D’Argenio, Wolovick)

Si $\mathcal{S}(R)$ está generada por un conjunto numerable, o $T_a(s)$ es numerable para todos a, s, entonces toda bisimulación tradicional es de estados.

Desafortunadamente, esto no es cierto en general

Contraejemplo (PST)

No toda bisimulación de estados (eventos) es tradicional.

Teoremas “del cociente”

Lema

R es de estados sii $\mathcal{S}(R)$ es estable.

Teorema (D’Argenio, Wolovick)

Si $\mathcal{S}(R)$ está generada por un conjunto numerable, o $T_a(s)$ es numerable para todos a, s, entonces toda bisimulación tradicional es de estados.

Desafortunadamente, esto no es cierto en general

Contraejemplo (PST)

No toda bisimulación de estados (eventos) es tradicional.

Teoremas “del cociente”

Lema

R es de estados sii $\mathcal{S}(R)$ es estable.

Teorema (D’Argenio, Wolovick)

Si $\mathcal{S}(R)$ está generada por un conjunto numerable, o $T_a(s)$ es numerable para todos a, s, entonces toda bisimulación tradicional es de estados.

Desafortunadamente, esto no es cierto en general

Contraejemplo (PST)

No toda bisimulación de estados (eventos) es tradicional.

Teoremas “del cociente”

Lema

R es de estados sii $\mathcal{S}(R)$ es estable.

Teorema (D’Argenio, Wolovick)

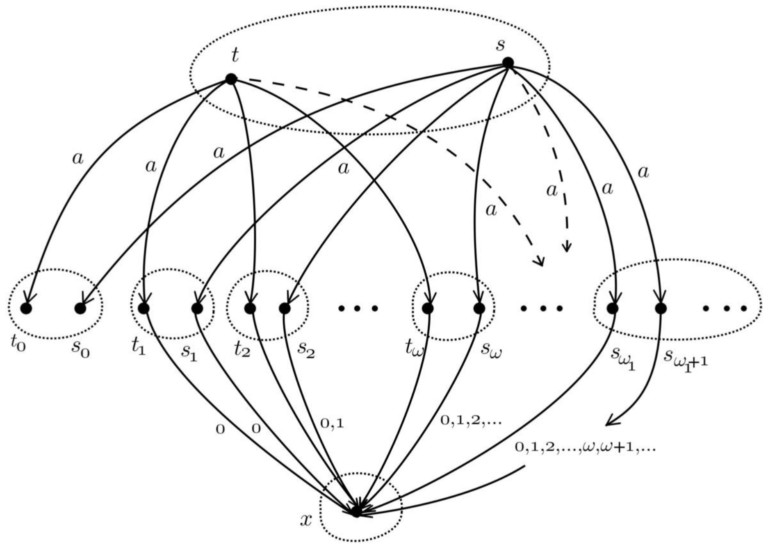
Si $\mathcal{S}(R)$ está generada por un conjunto numerable, o $T_a(s)$ es numerable para todos a, s, entonces toda bisimulación tradicional es de estados.

Desafortunadamente, esto no es cierto en general

Contraejemplo (PST)

No toda bisimulación de estados (eventos) es tradicional.

Contraejemplo (no probabilista ☹)



Problemas abiertos

- ¿Bisimulación de eventos = Bisimulación de estados?
- Mismas preguntas cuando $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es estándar (i.e., isomorfo a $\langle \mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}) \rangle$).
- Estudiar la posibilidad de definir limpiamente PMEN con conjuntos de transiciones más simples (cerrados, por ejemplos).

Problemas abiertos

- ¿Bisimulación de eventos = Bisimulación de estados?
- Mismas preguntas cuando $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es estándar (i.e., isomorfo a $\langle \mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}) \rangle$).
- Estudiar la posibilidad de definir limpiamente PMEN con conjuntos de transiciones más simples (cerrados, por ejemplos).

Problemas abiertos

- ¿Bisimulación de eventos = Bisimulación de estados?
- Mismas preguntas cuando $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es estándar (i.e., isomorfo a $\langle \mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}) \rangle$).
  El último contraejemplo tiene una σ-álgebra que no es separable, así que no entra en el caso anterior.
- Estudiar la posibilidad de definir limpiamente PMEN con conjuntos de transiciones más simples (cerrados, por ejemplos).

Problemas abiertos

- ¿Bisimulación de eventos = Bisimulación de estados?
- Mismas preguntas cuando $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es estándar (i.e., isomorfo a $\langle \mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}) \rangle$).
  El último contraejemplo tiene una σ-álgebra que no es separable, así que no entra en el caso anterior.
- Estudiar la posibilidad de definir limpiamente PMEN con conjuntos de transiciones más simples (cerrados, por ejemplos).

¡Muchas gracias!

Mejor que preguntas. . .

. . . ¿alguna respuesta?

[2009] P. D'ARGENIO, N. WOLOVICK, P. SÁNCHEZ TERRAF Y P. CELAYES
Nondeterministic Labeled Markov Processes: Bisimulations and Logical Characterization,
6^{th} International Conference on Quantitative Evaluation of SysTems (QEST).

[1999] J. DESHARNAIS
Labelled Markov Processes.
Ph.D. dissertation, McGill University, 1999.

[2006] V. DANOS, J. DESHARNAIS, F. LAVIOLETTE Y P. PANANGADEN
Bisimulation and cocongruence for probabilistic systems.
Inf. & Comp., vol. 204, pp. 503–523, 2006.